(84) 15/12

$\alpha<\beta$

$[\alpha,\beta]=\{x\in : \alpha\le x\le\beta\}$

S διάστημα $\Leftrightarrow (\forall \alpha,\beta \in S): [\alpha,\beta]\subseteq S$

<u>Πρόταση</u>

Έστω $S\subseteq\mathbb{R}$. Το S συνεκτικό $\Leftrightarrow$ S διάστημα

<u>Απόδειξη</u>

($\Rightarrow$) Έστω S συνεκτικό κ S όχι διάστημα. Τότε υπάρχουν $\alpha,\beta \in S$ με $[\alpha,\beta]\nsubseteq S$

$\exists k: \alpha<k<\beta$ με $k\notin S$

$A=(-\infty,k)$, $B=(k,+\infty)$ άρα $\{A,B\}$ ανοιχτή κάλυψη του S

$\alpha\in A\cap S\neq\emptyset\neq B\cap S\ni\beta$

$S\cap A\cap B=S\cap(A\cap B)=S\cap\emptyset=\emptyset$ ΑΤΟΠΟ

($\Leftarrow$) Υπάρχει στο βιβλίο

<u>Πρόταση</u>

Αν είναι (E_1,ρ_1), (E_2,ρ_2) μ.χ., (E_1,ρ_1) συνεκτικός κ $f: E_1 \xrightarrow{\text{επί}} E_2$ συνεχής.
Τότε κ ο E_2 είναι συνεκτικός

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ότι ο E_2 δεν είναι συνεκτικός. Τότε υπάρχει $A\subset E_2$ κ $A\neq\emptyset$ ανοιχτό κ κλειστό ταυτόχρονα. Τότε $f^{-1}(A)$ ανοιχτό κ κλειστό εν E_1 με $f^{-1}(A)\neq\emptyset$ κ $f^{-1}(A)\subset E_1$ ΑΤΟΠΟ

<u>Πρόταση</u>

Έστω $C_i, i\in I$ οικογένεια συνεκτικών συνόλων με $\bigcap_{i\in I} C_i\neq\emptyset$
Τότε $\bigcup_{i\in I} C_i$ είναι συνεκτικό σύνολο

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\bigcup_{i\in I} C_i$ μη συνεκτικό. Τότε $\exists\{A,B\}$ ανοιχτή κάλυψη του $\bigcup_{i\in I} C_i$ με
$A\cap(\bigcup_{i\in I} C_i)\neq\emptyset\neq B\cap(\bigcup_{i\in I} C_i)$ κ $(\bigcup_{i\in I} C_i)\cap A\cap B=\emptyset$

$\alpha\in\bigcap_{i\in I} C_i\neq\emptyset$, $\alpha\in\bigcap_{i\in I} C_i\subseteq\bigcup_{i\in I} C_i\subseteq A\cup B \Rightarrow \underline{\alpha\in A}$ ή $\underline{\alpha\in B}$

$\alpha\in A \xrightarrow{(\forall i\in I):\alpha\in C_i} \alpha\in A\cap C_i, i\in I$, $(\forall i\in I)$: $C_i\cap(A\cap B)\subseteq(\bigcup_{i\in I} C_i)\cap A\cap B=\emptyset$

με $A\cup B\supseteq C_i$, $i\in I$ άρα $B\cap C_i=\emptyset$, $\forall i\in I$ άρα

$(\bigcup_{i\in I} C_i)\cap B=\emptyset$, ΑΤΟΠΟ

Ομοίως και για $\alpha\in B$. Αποδείχθηκε

Πρόταση

Έστω C ένα υποσύνολο ενός μ.χ.: $(\forall x,y \text{ εν } C)(\exists \underset{\text{συνεκτ}}{S} \subseteq C)(x\in S \wedge y\in S)$

Τότε το C είναι συνεκτικό

Απόδειξη

Έστω a τυχόν στοιχείο του C. Τότε $(\forall x\in C)(\exists \underset{\text{συνεκτ.}}{S_x} \subseteq C)(x\in S_x \wedge a\in S_x)$ όπου

$S_x, x\in C$ οικογένεια συνεκτικών συνόλων με:

$(\forall x\in C): a\in S_x \Rightarrow a\in \bigcap_{x\in C} S_x \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_{x\in S} S_x$ συνεκτικό

$$\left.\begin{array}{l} \bigcup_{x\in C} S_x \subseteq C \\ x\in C \Rightarrow x\in S_x \Rightarrow x\in \bigcup_{x\in C} S_x \Rightarrow C\subseteq \bigcup_{x\in C} S_x \end{array}\right\} \Rightarrow C = \bigcup_{x\in C} S_x$$

Πρόταση

Έστω (E,ρ) είναι ο καρτ. μ.χ. $(E_1,\rho_1), (E_2,\rho_2)$.

Τότε (E,ρ) συνεκτικός $\Leftrightarrow$ $(E_1,\rho_1), (E_2,\rho_2)$ συνεκτικοί

Απόδειξη

$(\Longrightarrow)$ $p_1 : E \xrightarrow{\text{επί}} E_1$, $p_2 : E \xrightarrow{\text{επί}} E_2$

$(x,y)\in E_1\times E_2 = E$, $p_1(x,y) = x$, $p_2(x,y) = y$

$(\Longleftarrow)$ Ας είναι $x=(x_1,x_2)$ κ $y=(y_1,y_2)$ τυχόντα σημεία του $E_1\times E_2 = E$

$f(x) = (x,y_2)$, $x\in E_1$ με $f: E_1 \to E_1\times\{y_2\}$

$g(x) = (x_1,x)$, $x\in E_2$ με $f: E_2 \to \{x_1\}\times E_2$

Θεωρώ $(x_\nu)_{\nu\in N}$ ακολ. εν E_1, με $\lim_{\nu\in N} x_\nu = x_0 \in E_1$

$f(x_\nu) = (x_\nu, y_2) \longrightarrow (x_0,y_2) = f(x_0) \in E_1\times\{y_2\}$

ΑΣΚΗΣΗ

S_1, S_2, S_3 συνεκτ. κ $S_1\cap S_2 \neq \emptyset \neq S_2\cap S_3$ Ν.δ.ο. $S_1\cup S_2\cup S_3$ συνεκτ.

Λύση

S_1, S_2 συνεκτικοί κ $S_1\cap S_2\neq\emptyset \Rightarrow S_1\cup S_2$ συνεκτ.

$S_1\cup S_2$, S συνεκτικά

$$(S_1\cup S_2)\cap S_3 = (S_1\cap S_3)\cup\underbrace{(S_2\cap S_3)}_{\neq\emptyset} \neq \emptyset$$

Άρα $S_1\cup S_2\cup S_3$ συνεκτικά